18/03/19

Έστω x_0 αρχική μη εκφυλισμένη β.ε.λ

$x_0 = (x_{10}, x_{20}, \dots, x_{m0}, 0, \dots, 0)'$

$x_{10} P_1 + \dots + x_{m0} P_m = b$ (1)

$x_{10} c_1 + \dots + x_{m0} c_m = z_0$ (2)

$x_{1j} P_1 + \dots + x_{mj} P_m = P_j \quad j = 1, \dots, n$ (3)

$x_{1j} c_1 + \dots + x_{mj} c_m = z_j \quad j = 1, \dots, n$ (4)

Το κριτήριο για το c_0 η λύση είναι άριστη

Αν $z_j - c_j \geq 0 \quad \forall j = 1, \dots, n$ τότε η μη εκφυλισμένη β.ε.λ x_0 είναι άριστη

Απόδειξη: Έστω $y_0 = (y_{10}, \dots, y_{n0})$ μια άλλη λύση

$z_0 = c'x_0 \geq c'y_0 = z_0^*$

$\sum_{j=1}^{m} y_{j0} P_j = b \Rightarrow$

$\sum_{i=1}^{n} y_{j0} \sum_{j=1}^{m} x_{ij} P_i = b \Rightarrow$

$\sum_{i=1}^{m} P_i \sum_{j=1}^{n} y_{j0} x_{ij} = b \Rightarrow$

$x_{i0} = \sum_{j=1}^{n} y_{j0} x_{ij}$

$z_0 = c'x_0 = \sum_{i=1}^{m} c_i x_{i0} = \sum_{i=1}^{m} c_i \sum_{j=1}^{n} y_{j0} x_{ij} = \sum_{j=1}^{n} y_{j0} \sum_{i=1}^{m} c_i x_{ij} = \sum_{j=1}^{n} y_{j0} z_j$

$z_0 = \sum_{j=1}^{n} y_{j0} z_j \geq \sum_{i=1}^{n} y_{j0} c_j = z_0^*$

· Αν $z_j - c_j < 0$ για ένα τουλάχιστον j $(j=1,\dots,n)$ τότε η μη εκφυλισμένη β.ε.λ. $\underline{x}_0$ δεν είναι άριστη.

Απόδειξη: Αρκεί να βρούμε μια λύση $\underline{x}_1$ που να είναι καλύτερη από τη $\underline{x}_0$

$\underline{c}'\underline{x}_1 \geq \underline{c}'\underline{x}_0$

$\partial \in \mathbb{R}$ (1) - ∂(3) και (2) - ∂(4)

$(x_{10} - \partial x_{1j})\underline{P}_1 + \dots + (x_{m0} - \partial x_{mj})\underline{P}_m = \underline{b} - \partial \underline{P}_j \implies$

$(x_{10} - \partial x_{1j})c_1 + \dots + (x_{m0} - \partial x_{mj})c_m = z_0 - \partial z_j$

$(x_{10} - \partial x_{1j})\underline{P}_1 + \dots + (x_{m0} - \partial x_{mj})\underline{P}_m + \partial \underline{P}_j = b$

$(x_{10} - \partial x_{1j})c_1 + \dots + (x_{m0} - \partial x_{mj})c_m + \partial c_j = z_0 - \partial(z_j - c_j)$

$\left.\begin{array}{l} \partial \geq 0 \\ x_{i0} - \partial x_{ij} \geq 0 \end{array}\right\}$ θα πρέπει να ικανοποιούνται οι περιορισμοί

i) $x_{ij} \leq 0 \ \forall i \ \partial > 0$

ii) $x_{ij} \geq 0$ για ένα τουλάχ. i

$0 < \partial < \partial_0 \quad \partial_0 = \min\left\{ \frac{x_{i0}}{x_{ij}}, x_{ij} > 0 \right\}$

$\partial = \partial_0 \quad x_{10} - \partial x_{1j} = 0$

καινούρια λύση $\underline{x}_1 = x_1(\partial_0) = (0, x_{20} - \partial_0 x_{2j}, \dots, x_{m0} - \partial_0 x_{mj}, 0, \dots, \underset{j\text{-θέση}}{\partial_0}, 0, \dots, 0)$

Τα $\underline{P}_2, \underline{P}_3, \dots, \underline{P}_m, \underline{P}_j$ είναι γρ. ανεξάρτητα

$\lambda_2 \underline{P}_2 + \lambda_3 \underline{P}_3 + \dots + \lambda_m \underline{P}_m + \lambda_j \underline{P}_j = 0, \ \lambda_j \neq 0$ Υποθέτω ότι γρ. εξαρ. και καταλήγω σε άτοπο

$\lambda_j x_{1j} \underline{P}_1 + (\lambda_2 + \lambda_j x_{2j})\underline{P}_2 + \dots + (\lambda_m + \lambda_j x_{mj})\underline{P}_m = 0$

$\lambda_j x_{1j} = 0$

~~Παράδειγμα~~ Άσκηση Φυλλαδίου

x_1 Τόνοι χρώματος εξωτερικού χώρου

x_2 Τόνοι » εσωτερικού χώρου

$\max 5x_1 + 4x_2$

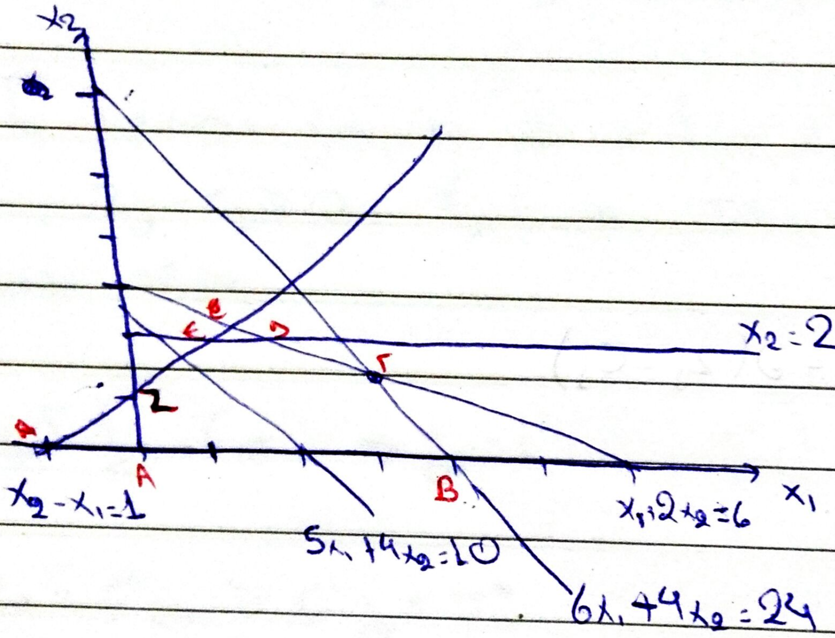
$6x_1 + 4x_2 \leq 24$ (πρώτη ύλη M_1)

$x_1 + 2x_2 \leq 6$ (» » M_2)

$x_2 \leq 2$ (μέγιστη ζήτηση χρωματ)

$x_2 - x_1 \leq 1$

$x_1, x_2 \geq 0$



$x_1 + 2x_2 = 6$

$6x_1 + 4x_2 = 24$

$x_1 = 3 \quad x_2 = 1.5$

$5 \cdot 3 + 4 \cdot 1.5 = 21$

$\max\ 300x_1 + 200x_2$

$x_1 + 2x_2 \le 6$

$2x_1 + x_2 \le 8$

$-x_1 + x_2 \le 1$

$x_2 \le 2$

$x_1, x_2 \ge 0$

$\max\ 300x_1 + 200x_2$

$x_1 + 2x_2 + x_3 = 6$

$2x_1 + x_2 + x_4 = 8$

$-x_1 + x_2 + x_5 = 1$

$x_2 + x_6 = 2$

$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \ge 0$

			300	200	0	0	0	0		
B	c_B	$\underline{b}$	$\underline{P_1}$	$\underline{P_2}$	$\underline{P_3}$	$\underline{P_4}$	$\underline{P_5}$	$\underline{P_6}$	θ	
$\underline{P_3}$	0	6	1	2	1	0	0	0	6/1	Γ_1
$\underline{P_4}$	0	8	2	1	0	1	0	0	8/2	Γ_2
$\underline{P_5}$	0	1	-1	1	0	0	1	0		Γ_3
$\underline{P_6}$	0	2	0	1	0	0	0	1		Γ_4
	z	0	-300	-200	0	0	0	0		Γ_5

πολλαπλ. $c_B \cdot b$

$c_B \cdot \underline{P_1} - 300$

Βάζω στη βάση αυτό που ανεβάζει περισσότερο την τιμή της αντικ. συνάρτησης, δηλαδή το $\underline{P_1}$

Στη θέση της P_4 θα μπει η $\underline{P_1}$

γραμμής

B	C_B	b	P_1 (300)	P_2 (200)	P_3 (0)	P_4 (0)	P_6 (0)	P_6 (0)		θ
$\leftarrow P_3$	0	2	0	3/2	1	-1/2	0	0	$\Gamma_1' = \Gamma_1 - \Gamma_2'$	4/3
P_1	300	4	1	1/2	0	1/2	0	0	$\Gamma_2' = \frac{1}{2}\Gamma_2$	8
P_5	0	5	0	3/2	0	1/2	1	0	$\Gamma_3' = \Gamma_3 - (-1)\Gamma_2'$	10/3
P_6	0	2	0	1	0	0	0	1	$\Gamma_4' = \Gamma_4 - 0\,\Gamma_2'$	2
	Z	1200	0	-50	0	150	0	0	$\Gamma_5' = \Gamma_5 - (-300)\Gamma_2'$	

Επαναλαμβάνω την ίδια διαδικασία για να φύγει το -50

B	C_B	b	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6	
P_2	200	4/3	0	1	2/3	-1/3	0	0	$\Gamma_1'' = \frac{2}{3}\Gamma_1'$
P_1	300	10/3	1	0	-1/3	2/3	0	0	$\Gamma_2'' = \Gamma_2' - \frac{1}{2}\Gamma_1''$
P_5	0	3	0	0	-1	1	1	0	$\Gamma_3'' = \Gamma_3' - \frac{2}{3}\Gamma_1''$
P_6	0	2/3	0	0	-2/3	1/3	0	1	$\Gamma_4'' = \Gamma_4' - 1\cdot\Gamma_1''$
	Z	$\frac{3300}{3}$	0	0	100/3	400/3	0	0	$\Gamma_5'' = \Gamma_5' - (-50)\,\Gamma_1''$

Είναι όλα θετικά, άρα φτάσαμε σε άριστη λύση με

$x_1 = \frac{10}{3}$ $\quad x_2 = \frac{4}{3}$ $\quad Z = \frac{3300}{3}$ (για το αρχ. πρόβλημα που είχε 2 μεταβλητές)

Αλλιώς $x_1 = \frac{10}{3}$ $\quad x_2 = \frac{4}{3}$ $\quad x_3 = 0$ $\quad x_4 = 0$ $\quad x_5 = 3$ $\quad x_6 = \frac{2}{3}$ $\quad Z = \frac{3300}{3}$

$B = (P_1 \; P_2 \; \dots \; P_m)$

$\underline{x_B} = (x_1, \dots, x_m)'$

$\overset{o}{\underline{x_B}} = (x_{1o}, \dots, x_{mo})'$

$\underline{C_B} = (c_1, \dots, c_m)'$

$A = [B, N]$

$$[B, N]\begin{bmatrix} \underline{x_B} \\ \underline{x_N} \end{bmatrix} = \underline{b}$$

$$B\underline{x_B} = b - N\underline{x_N}$$

$$\underline{x_B} = B^{-1}b - \cancel{B^{-1}N\underline{x_N}}^{\,0}$$

$Bx_B = b$

$c_B' x_B = z_0$

$B y_j = P_j \Rightarrow y_j = B^{-1} P_j$

$Y = B^{-1} A$

$B^{-1}b$	$B^{-1}A$
$c_B' B^{-1} b$	$c_B' B^{-1} A - c'$

Πινακας Σιμπλεξ

(*)

Απο το Ταμπλο

$(P_3 \quad P_1 \quad P_5 \quad P_6)$ Αυτη ειναι η βαση

$$\Vert$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Εφοσον εχω αυτο μπορω να βρω οτιδηποτε

Π.χ Αν ψαχνω το b στο τελικο πινακα Ταμπλο SOS

$$\begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & 0 & 0 \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{9}{3} \\ \frac{12}{3} \\ \vdots \\ \vdots \end{pmatrix} = b$$

(*) Να ξέρω τα θεωρήματα (που μετακινούμαι από κορυφή σε κορυφή)

Αν τύχει μια στήλη ολόκληρη να είναι αρνητική τότε είναι μη φραγμένο

~~Παράδειγμα~~ Άσκηση: Να λυθεί.

$$\max \; -x_1 + 2x_2 - 3x_3$$

$$\begin{aligned} x_1 - 2x_2 + x_3 + 2x_4 &= 10 \\ 2x_2 - x_3 &\le 1 \\ x_2 + 2x_4 &\le 8 \end{aligned}$$

$x_i \ge 0$